相似标准形理论中的辩证思维方法

鲍炎红

安徽大学数学科学学院

福建省《高等代数》与《线性代数》课程建设
第二十二次研讨会
2023年3月24日-26日

目录

一、专业课程中课程思政的目标和要求

习近平总书记在2016年12月召开的全国高校思想政治工作会议上指出："其他各门课都要守好一段渠、种好责任田，使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应"。

一、专业课程中课程思政的目标和要求

习近平总书记在2016年12月召开的全国高校思想政治工作会议上指出："其他各门课都要守好一段渠、种好责任田，使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应"。

"课程思政"不是"思政课程"的同义转换，要强调自然科学与哲学社会科学的各类课程蕴含可供挖掘的思想政治教育资源，能够发挥多方面、多维度的育人功能，与思政课程同向同行、同频共振。

一、 专业课程中课程思政的目标和要求

习近平总书记在2016年12月召开的全国高校思想政治工作会议上指出："其他各门课都要守好一段渠、种好责任田，使各类课程与思想政治理论课同向同行，形成协同效应"。

"课程思政"不是"思政课程"的同义转换，要强调自然科学与哲学社会科学的各类课程蕴含可供挖掘的思想政治教育资源，能够发挥多方面、多维度的育人功能，与思政课程同向同行、同频共振。

2020年，教育部印发《高等学校课程思政建设指导纲要》，强调要结合公共基础课程、专业教育课程、实践类课程的具体特点，科学设计课程思政教学体系。

《高等学校课程思政建设指导纲要》

专业教育课程。要根据不同学科专业的特色和优势，深入研究不同专业的育人目标，深度挖掘提炼专业知识体系中所蕴含的思想价值和精神内涵，科学合理拓展专业课程的广度、深度和温度，从课程所涉专业、行业、国家、国际、文化、历史等角度，增加课程的知识性、人文性，提升引领性、时代性和开放性。

《高等学校课程思政建设指导纲要》

专业教育课程。要根据不同学科专业的特色和优势，深入研究不同专业的育人目标，深度挖掘提炼专业知识体系中所蕴含的思想价值和精神内涵，科学合理拓展专业课程的广度、深度和温度，从课程所涉专业、行业、国家、国际、文化、历史等角度，增加课程的知识性、人文性，提升引领性、时代性和开放性。

——**理学专业课程**。要在课程教学中把马克思主义立场观点方法的教育与科学精神的培养结合起来，提高学生正确认识问题、分析问题和解决问题的能力。理学类专业课程，要注重科学思维方法的训练和科学伦理的教育，培养学生探索未知、追求真理、勇攀科学高峰的责任感和使命感。

辩证思维方法

- 归纳与演绎。
- 分析与综合。
    - 分析是在思维中把认识对象分解为各个部分、方面、要素，以便分别加以研究的思维方法。
    - 综合通常被看作是在把整体分解为各个因素的基础上，再组合成一个整体的思维活动，是在思维中把对象的各个本质的方面按其内在联系有机地结合成一个统一的整体。
    - 分析是综合的基础，综合是分析的完成。
- 抽象与具体。
- 逻辑与历史相统一。

二、数学专业课程中的思政元素

- 设计理念：以马克思主义基本原理指导本课程的教与学，让基本原理变成生动道理，让根本方法变成管用办法.

二、 数学专业课程中的思政元素

- 设计理念：以马克思主义基本原理指导本课程的教与学，让基本原理变成生动道理，让根本方法变成管用办法.
- 设计思路: 以辩证唯物主义方法阐释数学理论知识与研究方法，提高学术水平和创新能力；以历史唯物主义观点阐释数学的历史发展, 理解一切数学概念源于社会实践, 数学的发展源于生产力的发展；注重借助思政元素化解教学难点、提升专业知识理解能力。

二、 数学专业课程中的思政元素

- 设计理念：以马克思主义基本原理指导本课程的教与学，让基本原理变成生动道理，让根本方法变成管用办法.
- 设计思路：以辩证唯物主义方法阐释数学理论知识与研究方法，提高学术水平和创新能力；以历史唯物主义观点阐释数学的历史发展，理解一切数学概念源于社会实践，数学的发展源于生产力的发展；注重借助思政元素化解教学难点、提升专业知识理解能力。
- 设计方法：深挖专业知识点蕴涵的辩证唯物主义和历史唯物主义思想，利用归纳与演绎、分析与综合、抽象与具体、逻辑与历史相统一等辩证思维方法指导专业知识点的理解和学习，以历史唯物主义观点理解数学的发展，实现思想引领和价值引导.

三大规律：对立统一规律、量变质变规律、否定之否定规律。

唯物辩证法

三大规律：对立统一规律、量变质变规律、否定之否定规律。

五大范畴：

- 现象与本质
- 必然性与偶然性
- 原因与结果
- 可能性与现实性
- 内容与形式。

三、相似标准形理论几何方法中的思政元素

相似标准形是高等代数课程中最深刻的内容，也是最精彩的内容。

- **线性变换语言**: 对于给定线性变换, 寻找一组“好”的基, 使得该线性变换在这组基下的矩阵形式上“最简单”。
- **矩阵语言**：对于给定方阵, 寻找其所在相似等价类中形式“最简单”的矩阵.

三、相似标准形理论几何方法中的思政元素

相似标准形是高等代数课程中最深刻的内容，也是最精彩的内容。

- **线性变换语言**: 对于给定线性变换, 寻找一组“好”的基, 使得该线性变换在这组基下的矩阵形式上“最简单”。
- **矩阵语言**：对于给定方阵, 寻找其所在相似等价类中形式“最简单”的矩阵.
- **几何方法**: 依据给定线性变换, 将线性空间分解成若干不变子空间直和, 使得给定线性变换在每个不变子空间上的限制能有形式“最简单”的矩阵.
- **代数方法**：确定矩阵的完全相似不变量, 依据这些不变量直接写出相似标准形.

*Jordan*标准形几何方法的难点分解

Jordan标准形几何方法

- 将线性空间分解成所研究线性变换的根子空间的直和（限制在每个根子空间上，线性变换可分解成一个数乘变换和一个幂零变换的和），

*Jordan*标准形几何方法的难点分解

Jordan标准形几何方法

- 将线性空间分解成所研究线性变换的根子空间的直和（限制在每个根子空间上，线性变换可分解成一个数乘变换和一个幂零变换的和），
- 再将每个根子空间分解成若干个循环子空间的直和。

Jordan标准形几何方法的难点分解

Jordan标准形几何方法

- 将线性空间分解成所研究线性变换的根子空间的直和（限制在每个根子空间上，线性变换可分解成一个数乘变换和一个幂零变换的和），
- 再将每个根子空间分解成若干个循环子空间的直和。
- 最后在每个循环子空间中间找出一组合适的基，拼起来就得到整个大空间的一组基，而线性变换在这样一组基下的矩阵就是Jordan标准形矩阵。

思政元素

(1) 分析与综合是自然辨证法中一种深刻的思想方法。分析就是“分而析之”，即化整为零，各个出击，区别对待，区分考察，各个击破找出事物或现象的基础和本质；综合就是把整体分解为各个部分研究后，再按其内在联系进行组织统一。

思政元素

(1) 分析与综合是自然辨证法中一种深刻的思想方法。分析就是“分而析之”，即化整为零，各个出击，区别对待，区分考察，各个击破找出事物或现象的基础和本质；综合就是把整体分解为各个部分研究后，再按其内在联系进行组织统一。

(2) 主要矛盾与次要矛盾。在寻找根子空间上合适的基时，其“幂零部分”是“主要矛盾”，而数乘部分则是“次要矛盾”。

教学过程

(1) 学习“分析与综合”的辩证思维方法。引出空间分解基本定理。

教学过程

(1) 学习“分析与综合”的辩证思维方法。引出空间分解基本定理。

(2) 介绍空间第一分解定理，即将整个空间分解成根子空间的直和。实现“分而析之”的第一步：“分”。

教学过程

(1) 学习“分析与综合”的辩证思维方法。引出空间分解基本定理。

(2) 介绍空间第一分解定理，即将整个空间分解成根子空间的直和。实现“分而析之”的第一步：“分”。

(3) 对每个根子空间加以研究。

教学过程

(1) 学习“分析与综合”的辩证思维方法。引出空间分解基本定理。

(2) 介绍空间第一分解定理，即将整个空间分解成根子空间的直和。实现“分而析之”的第一步：“分”。

(3) 对每个根子空间加以研究。着重强调限制在每个根子空间上，线性变换又可分解为数乘部分和幂零部分的和。抓住“幂零部分”这一主要矛盾，介绍空间第二分解定理。实现“分而析之”的第二步：“析”。

教学过程

(1) 学习“分析与综合”的辩证思维方法。引出空间分解基本定理。

(2) 介绍空间第一分解定理，即将整个空间分解成根子空间的直和。实现“分而析之”的第一步：“分”。

(3) 对每个根子空间加以研究。着重强调限制在每个根子空间上，线性变换又可分解为数乘部分和幂零部分的和。抓住“幂零部分”这一主要矛盾，介绍空间第二分解定理。实现“分而析之”的第二步：“析”。

(4) 由空间第一、二分解定理，将每个循环子空间选定对应Jordan块的基，拼起来即得到整个空间的一组基。

教学过程

(1) 学习“分析与综合”的辩证思维方法。引出空间分解基本定理。

(2) 介绍空间第一分解定理，即将整个空间分解成根子空间的直和。实现“分而析之”的第一步：“分”。

(3) 对每个根子空间加以研究。着重强调限制在每个根子空间上，线性变换又可分解为数乘部分和幂零部分的和。抓住“幂零部分”这一主要矛盾，介绍空间第二分解定理。实现“分而析之”的第二步：“析”。

(4) 由空间第一、二分解定理，将每个循环子空间选定对应Jordan块的基，拼起来即得到整个空间的一组基。完成了最后一步“综合”。

- 第一步. **第五章　一元多项式**
  - 5.3.　因式分解定理

例

设$f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)\in\mathbb{F}[x]$, 且$f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素. 记$g_i(x)=\dfrac{f(x)}{f_i(x)}, 1\leq i\leq s$. 证明: $g_1(x),\cdots,g_s(x)$互素.

不变子空间的构造.

- "抛砖引玉"： U_1, U_2是$\mathscr{A}$的不变子空间, 则$U_1+U_2, U_1\cap U_2$也是.
- "无中生有"
  - 若$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$, 则$\operatorname{Ker}\mathscr{B}, \operatorname{Im}\mathscr{B}$都是$\mathscr{A}$的不变子空间.
  - 循环子空间$C(\alpha)$: 包含α最小的$\mathscr{A}$的不变子空间.

- 第三步. 第四章　线性映射
    - 4.5.　不变子空间

引理（准素分解定理)

设$\mathscr{A}$是V上线性变换, $f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$, 其中$f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素. 若$f(\mathscr{A})=0$, 则

$$V=\operatorname{Ker} f_1(\mathscr{A})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker} f_s(\mathscr{A}).$$

- 第四步. **第六章　相似标准形**
  - 6.1.　特征值与特征向量

定理（Hamilton-Cayley定理）

设n阶方阵A的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

则

$$f(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0.$$

- 第五步. **第六章　相似标准形**
  - 6.7.　根子空间与空间第一分解定理

分析:

1. "分"：将V分解成若干不变子空间的直和$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.

分析:

1. “分”：将V分解成若干不变子空间的直和$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.
2. “析”：在每个W_i中找出合适基$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$，使得$\mathscr{A}|_{W_i}$在该基下的矩阵$A_i$具有最简形式, $i = 1, \cdots, s$.

- 第五步. **第六章　相似标准形**
  - 6.7.　根子空间与空间第一分解定理

分析:

1. “分”：将V分解成若干不变子空间的直和$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.
2. “析”：在每个W_i中找出合适基$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$，使得$\mathscr{A}|_{W_i}$在该基下的矩阵$A_i$具有最简形式, $i = 1, \cdots, s$.

综合:

1. $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \cdots, \alpha_{sr_s}$ 构成V的一组基.

- 第五步. **第六章　相似标准形**
  - 6.7.　根子空间与空间第一分解定理

分析:

1. “分”：将V分解成若干不变子空间的直和$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.
2. “析”：在每个W_i中找出合适基$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$，使得$\mathscr{A}|_{W_i}$在该基下的矩阵$A_i$具有最简形式，$i = 1, \cdots, s$.

综合:

1. $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \cdots, \alpha_{sr_s}$ 构成V的一组基.
2. $\mathscr{A}$在上述基下的矩阵为$\mathrm{diag}(A_1, \cdots, A_s)$，具有最简形式.

设$\mathscr{A}$有n个特征值(重), 其特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$所有两两不同的特征值，$r_i\geq 1, 1\leq i\leq s.$

设$\mathscr{A}$有n个特征值(重), 其特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$所有两两不同的特征值，$r_i\geq 1, 1\leq i\leq s$.

由Cayley-Hamilton定理, $f(\mathscr{A})=\mathcal{O}$.

设$\mathscr{A}$有n个特征值(重), 其特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$所有两两不同的特征值，$r_i\geq 1, 1\leq i\leq s$.

由Cayley-Hamilton定理, $f(\mathscr{A})=\mathcal{O}$.

令$f_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}, 1\leq i\leq s$. $f(\lambda)=f_1(\lambda)\cdots f_s(\lambda)$.
$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两不同, 故$f_1(\lambda),\cdots,f_s(\lambda)$两两互素.

设$\mathscr{A}$有n个特征值(重), 其特征多项式

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$为$\mathscr{A}$所有两两不同的特征值，$r_i \geq 1, 1 \leq i \leq s$.

由Cayley-Hamilton定理, $f(\mathscr{A}) = \mathcal{O}$.

令$f_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{r_i}, 1 \leq i \leq s$. $f(\lambda) = f_1(\lambda) \cdots f_s(\lambda)$.
$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$两两不同, 故$f_1(\lambda), \cdots, f_s(\lambda)$两两互素.

准素分解定理

$$V = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})^{r_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_s \operatorname{Id})^{r_s}.$$

设$\mathscr{A}$有n个特征值(重), 其特征多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$为$\mathscr{A}$所有两两不同的特征值，$r_i\geq 1, 1\leq i\leq s$.

由Cayley-Hamilton定理, $f(\mathscr{A})=\mathcal{O}$.

令$f_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{r_i}, 1\leq i\leq s$. $f(\lambda)=f_1(\lambda)\cdots f_s(\lambda)$.
$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$两两不同, 故$f_1(\lambda),\cdots,f_s(\lambda)$两两互素.

准素分解定理

$$V=\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_1\operatorname{Id})^{r_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\mathscr{A}-\lambda_s\operatorname{Id})^{r_s}.$$

定义（根子空间与根向量）

设$\mathscr{A}$是V上线性变换, λ_0是$\mathscr{A}$的特征值. 称

$$W_{\lambda_0} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_0 \,\mathrm{Id})^{r_0}$$

为$\mathscr{A}$的属于特征值λ_0的根子空间, 其中r_0为λ_0 的代数重数. 称$0 \neq \alpha \in W_{\lambda_0}$为$\mathscr{A}$属于特征值$\lambda_0$的根向量 .

定义（根子空间与根向量）

设$\mathscr{A}$是V上线性变换，λ_0是$\mathscr{A}$的特征值．称

$$W_{\lambda_0} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_0 \,\mathrm{Id})^{r_0}$$

为$\mathscr{A}$的属于特征值λ_0的根子空间，其中r_0为λ_0 的代数重数．称$0 \neq \alpha \in W_{\lambda_0}$为$\mathscr{A}$属于特征值$\lambda_0$的根向量 ．

由准素分解定理和Cayley-Hamilton定理立知：

定理（ 空间第一分解定理）

设$\mathscr{A}$是V上线性变换，且有n个特征值(重)．$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$为$\mathscr{A}$的所有互不相同的特征值，$W_{\lambda_i}$为$\mathscr{A}$的属于特征值$\lambda_i$的根子空间，$i = 1, \cdots, s$．则

$$V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}.$$

- 第六步. **第六章 相似标准形**
  - 6.8. 幂零变换

- 第六步. **第六章　相似标准形**
  - 6.8.　幂零变换

空间第一分解定理: $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$

其中根子空间$W_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{r_i} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}$.

空间第一分解定理: $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$

其中根子空间$W_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})^{r_i} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}$.

考虑$\mathscr{A}$在W_{λ_i}上的限制$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}} = \mathscr{A}_i \colon W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}$.

空间第一分解定理: $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$

其中根子空间$W_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{r_i} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{m_i}$.

考虑$\mathscr{A}$在W_{λ_i}上的限制$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}} = \mathscr{A}_i : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}$.

记$\mathscr{B}_i = \mathscr{A}_i - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{W_{\lambda_i}}$, 则

空间第一分解定理: $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$

其中根子空间$W_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \, \mathrm{Id})^{r_i} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \, \mathrm{Id})^{m_i}$.

考虑$\mathscr{A}$在W_{λ_i}上的限制$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}} = \mathscr{A}_i : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}$.

记$\mathscr{B}_i = \mathscr{A}_i - \lambda_i \, \mathrm{Id}_{W_{\lambda_i}}$, 则

$$\mathscr{A}_i = \mathscr{B}_i + \lambda_i \, \mathrm{Id}_{W_{\lambda_i}} .$$

空间第一分解定理: $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$

其中根子空间$W_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})^{r_i} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}$.

考虑$\mathscr{A}$在W_{λ_i}上的限制$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}} = \mathscr{A}_i : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}$.

记$\mathscr{B}_i = \mathscr{A}_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_{\lambda_i}}$, 则

$$\mathscr{A}_i = \mathscr{B}_i + \lambda_i \operatorname{Id}_{W_{\lambda_i}} .$$

其中

1. $\mathscr{B}_i$为W_{λ_i}上的幂零变换(即$\mathscr{B}_i^{r_i} = \mathcal{O}$), (主要矛盾！)

空间第一分解定理: $V = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_s}$

其中根子空间$W_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})^{r_i} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})^{m_i}$.

考虑$\mathscr{A}$在W_{λ_i}上的限制$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_i}} = \mathscr{A}_i : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}$.

记$\mathscr{B}_i = \mathscr{A}_i - \lambda_i \operatorname{Id}_{W_{\lambda_i}}$, 则

$$\mathscr{A}_i = \mathscr{B}_i + \lambda_i \operatorname{Id}_{W_{\lambda_i}} .$$

其中

1. $\mathscr{B}_i$为W_{λ_i}上的幂零变换(即$\mathscr{B}_i^{r_i} = \mathscr{O}$), (主要矛盾!)
2. $\lambda_i \operatorname{Id}_{W_{\lambda_i}}$为$W_{\lambda_i}$上的数乘变换. (次要矛盾!)

定义（6.8.1)

设$\mathscr{A}$是V上线性变换. 若存在$m \in \mathbb{N}_+$，使得$\mathscr{A}^m = 0$, 则称$\mathscr{A}$ 为幂零变换. 若还有$\mathscr{A}^{m-1} \neq 0$, 则称m 为$\mathscr{A}$的幂零指数.

定义 (6.8.1)

设$\mathscr{A}$是V上线性变换. 若存在$m \in \mathbb{N}_+$，使得$\mathscr{A}^m = 0$, 则称$\mathscr{A}$ 为幂零变换. 若还有$\mathscr{A}^{m-1} \neq 0$, 则称m 为$\mathscr{A}$的幂零指数.

设$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. 若存在$m \in \mathbb{N}_+$，使得$A^m = 0$, 则称$A$ 为幂零阵.

回顾：由α相对$\mathscr{A}$生成的循环子空间$C(\alpha)$.

回顾: 由α相对$\mathscr{A}$生成的循环子空间$C(\alpha)$.

若$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$线性无关, 且$\alpha$, $\mathscr{A}(\alpha)$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{k}(\alpha)$线性相关,

则$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$构成$C(\alpha)$的基.

回顾：由α相对$\mathscr{A}$生成的循环子空间$C(\alpha)$.

若$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$线性无关，且$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k}(\alpha)$线性相关，

则$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$构成$C(\alpha)$的基.

引理（关键引理）

设$\mathscr{A}$是V上的m次幂零变换，且$\mathscr{A}^{m-1}(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in V$.

回顾：由α相对$\mathscr{A}$生成的循环子空间$C(\alpha)$.

若$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$线性无关，且$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k}(\alpha)$线性相关，

则$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$构成$C(\alpha)$的基.

引理（关键引理）

设$\mathscr{A}$是V上的m次幂零变换，且$\mathscr{A}^{m-1}(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in V$.

(1) $\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{m-1}(\alpha)$ 为$C(\alpha)$ 的一组基.

回顾：由α相对$\mathscr{A}$生成的循环子空间$C(\alpha)$.

若$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$线性无关，且$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k}(\alpha)$线性相关，则$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$构成$C(\alpha)$的基.

引理（关键引理）

设$\mathscr{A}$是V上的m次幂零变换，且$\mathscr{A}^{m-1}(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in V$.

(1) $\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{m-1}(\alpha)$ 为$C(\alpha)$ 的一组基.

(2) 存在$\mathscr{A}$的不变子空间V_1，使得$V = C(\alpha) \oplus V_1$.

回顾：由α相对$\mathscr{A}$生成的循环子空间$C(\alpha)$.

若$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$线性无关，且$\alpha$, $\mathscr{A}(\alpha)$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{k}(\alpha)$线性相关，则$\alpha, \mathscr{A}(\alpha), \cdots, \mathscr{A}^{k-1}(\alpha)$构成$C(\alpha)$的基.

引理（关键引理）

设$\mathscr{A}$是V上的m次幂零变换，且$\mathscr{A}^{m-1}(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in V$.

(1) α, $\mathscr{A}(\alpha)$, $\cdots$, $\mathscr{A}^{m-1}(\alpha)$ 为$C(\alpha)$ 的一组基.

(2) 存在$\mathscr{A}$的不变子空间V_1，使得$V = C(\alpha) \oplus V_1$.

定理

设$\mathscr{A}$是V上幂零变换. 则存在V的一组基，使得$\mathscr{A}$在该基下的矩阵形如

$$\mathrm{diag}(J(0, m_1), \cdots, J(0, m_t)).$$

- 第七步. 第六章　相似标准形
    - 6.9.　空间第二分解定理

设λ_0是$\mathscr{A}$的任一特征值. 注意到,

$$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_0}} = (\mathscr{A} - \lambda_0 \,\mathrm{Id})|_{W_{\lambda_0}} + \lambda_0 \,\mathrm{Id}_{W_{\lambda_0}},$$

设λ_0是$\mathscr{A}$的任一特征值. 注意到,

$$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_0}} = (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}} + \lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}},$$

其中$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}}$恰为一个幂零变换, 而$\lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}}$为一数乘变换.

设λ_0是$\mathscr{A}$的任一特征值. 注意到,

$$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_0}} = (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}} + \lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}},$$

其中$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}}$恰为一个幂零变换, 而$\lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}}$为一数乘变换. 于是我们可以利用对幂零变换的讨论，直接给出如下结果.

设λ_0是$\mathscr{A}$的任一特征值. 注意到,

$$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_0}} = (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}} + \lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}},$$

其中$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}}$恰为一个幂零变换, 而$\lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}}$为一数乘变换. 于是我们可以利用对幂零变换的讨论，直接给出如下结果.

定理（空间第二分解定理)

设W_{λ_0}是$\mathscr{A}$属于特征值λ_0的根子空间，则存在$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in W_{\lambda_0}$，使得

$$W_{\lambda_0} = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_k),$$

设λ_0是$\mathscr{A}$的任一特征值. 注意到,

$$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_0}} = (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}} + \lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}},$$

其中$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{W_{\lambda_0}}$恰为一个幂零变换, 而$\lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}}$ 为一数乘变换. 于是我们可以利用对幂零变换的讨论，直接给出如下结果.

定理（空间第二分解定理）

设W_{λ_0}是$\mathscr{A}$属于特征值λ_0的根子空间，则存在$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in W_{\lambda_0}$，使得

$$W_{\lambda_0} = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_k),$$

其中$C(\alpha_i)$为由α_i生成的相对$\mathscr{A}|_{W_{\alpha_0}} - \lambda_0 \operatorname{Id}_{W_{\lambda_0}}$的循环子空间.

再次“分析与综合”

$$W_{\lambda_0} = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_k),$$

再次“分析与综合”

$$W_{\lambda_0} = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_k),$$

选取循环子空间$C(\alpha_i)$的基

$$\alpha_i, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})(\alpha_i), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i - 1}(\alpha_i),$$

再次“分析与综合”

$$W_{\lambda_0} = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_k),$$

选取循环子空间$C(\alpha_i)$的基

$$\alpha_i, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})(\alpha_i), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i - 1}(\alpha_i),$$

其中m_i为$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{C(\alpha_i)}$的幂零指数(即$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i}(\alpha_i) = 0$, 但$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i - 1}(\alpha_i) \neq 0$), 也就是$C(\alpha_i)$的维数.

再次“分析与综合”

$$W_{\lambda_0} = C(\alpha_1) \oplus C(\alpha_2) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_k),$$

选取循环子空间$C(\alpha_i)$的基

$$\alpha_i, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})(\alpha_i), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i - 1}(\alpha_i),$$

其中m_i为$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})|_{C(\alpha_i)}$的幂零指数(即$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i}(\alpha_i) = 0$, 但$(\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_i - 1}(\alpha_i) \neq 0$), 也就是$C(\alpha_i)$的维数.

将所有这些向量合成W_{λ_0}的基

$$\alpha_1, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})(\alpha_1), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_1 - 1}(\alpha_1)$$

$$\cdots,$$

$$\alpha_k, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})(\alpha_k), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_0 \operatorname{Id})^{m_k - 1}(\alpha_k),$$

则$\mathscr{A}|_{W_{\lambda_0}}$在该基下的矩阵为

$$\operatorname{diag}(J(\lambda_0, m_1), \cdots, J(\lambda_0, m_k)).$$

综合空间第一、二分解定理, 有如下直和分解

$$V = C(\alpha_{11}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{1k_1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{s1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{sk_s}),$$

综合空间第一、二分解定理, 有如下直和分解

$$V = C(\alpha_{11}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{1k_1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{s1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{sk_s}),$$

若$(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})|_{C(\alpha_{ij})}$的幂零指数为$m_{ij}$,

综合空间第一、二分解定理, 有如下直和分解

$$V = C(\alpha_{11}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{1k_1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{s1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{sk_s}),$$

若$(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})|_{C(\alpha_{ij})}$的幂零指数为$m_{ij}$，则$\mathscr{A}$在$V$的基

$$\alpha_{11}, (\mathscr{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})(\alpha_{11}), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})^{m_{11}-1}(\alpha_{11}),$$
$$\cdots,$$
$$\alpha_{sk_s}, (\mathscr{A} - \lambda_s \operatorname{Id})(\alpha_{sk_s}), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_s \operatorname{Id})^{m_{sk_s}-1}(\alpha_{sk_s})$$

综合空间第一、二分解定理, 有如下直和分解

$$V = C(\alpha_{11}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{1k_1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{s1}) \oplus \cdots \oplus C(\alpha_{sk_s}),$$

若$(\mathscr{A} - \lambda_i \operatorname{Id})|_{C(\alpha_{ij})}$的幂零指数为$m_{ij}$，则$\mathscr{A}$在$V$的基

$$\begin{gathered}\alpha_{11}, (\mathscr{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})(\alpha_{11}), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_1 \operatorname{Id})^{m_{11}-1}(\alpha_{11}),\\ \cdots,\\ \alpha_{sk_s}, (\mathscr{A} - \lambda_s \operatorname{Id})(\alpha_{sk_s}), \cdots, (\mathscr{A} - \lambda_s \operatorname{Id})^{m_{sk_s}-1}(\alpha_{sk_s})\end{gathered}$$

下的矩阵为Jordan标准形矩阵

$$\operatorname{diag}(J(\lambda_1, m_{11}), \cdots, J(\lambda_1, m_{1k_1}), \cdots, J(\lambda_s, m_{s1}), \cdots, J(\lambda_s, m_{sk_s})).$$

案例2. 线性空间定义的辩证思维与历史唯物主义观

线性空间的定义是在考察大量现实对象本质属性后抽象出来的数学概念。

案例2. 线性空间定义的辩证思维与历史唯物主义观

线性空间的定义是在考察大量现实对象本质属性后抽象出来的数学概念。

思政元素：数学的公理化定义体现出抽象与具体的辩证思维方法。

案例2. 线性空间定义的辩证思维与历史唯物主义观

线性空间的定义是在考察大量现实对象本质属性后抽象出来的数学概念。

思政元素：数学的公理化定义体现出抽象与具体的辩证思维方法。

抽象与具体是辩证思维的高级形式，这一思维方法是通过具体到抽象，又从抽象到具体的过程，达到对事物的真理性认识。抽象是通过分析把整体分解成各个部分，区分开必然本质的方面和偶然现象的方面，从中抽取出各个必然的本质的因素，以达到对具体事物的某一本质方面的认识，实现从具体到抽象的过程。但要真正达到对具体事物的全面的具体认识，还必须把事物各方面的本质的认识联系起来，形成关于统一的事物整体的认识，使抽象的规定在思维的具体中再现出来。

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。实现从具体到抽象的辩证思维过程。

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。实现从具体到抽象的辩证思维过程。
2. 启发学生探索上述具体实例中这两种运算的规律，总结出八条公理，引入线性空间定义，明确其四要素和八条公理，突出公理化思想。

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。实现从具体到抽象的辩证思维过程。
2. 启发学生探索上述具体实例中这两种运算的规律，总结出八条公理，引入线性空间定义，明确其四要素和八条公理，突出公理化思想。体会到从抽象上升到具体的过程:以抽象为逻辑起点，通过各种形式的逻辑中介，达到以思维具体的逻辑终点的运行过程.

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。实现从具体到抽象的辩证思维过程。
2. 启发学生探索上述具体实例中这两种运算的规律，总结出八条公理，引入线性空间定义，明确其四要素和八条公理，突出公理化思想。体会到从抽象上升到具体的过程:以抽象为逻辑起点，通过各种形式的逻辑中介，达到以思维具体的逻辑终点的运行过程.
3. 给出常见线性空间的例子。

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。实现从具体到抽象的辩证思维过程。
2. 启发学生探索上述具体实例中这两种运算的规律，总结出八条公理，引入线性空间定义，明确其四要素和八条公理，突出公理化思想。体会到从抽象上升到具体的过程:以抽象为逻辑起点，通过各种形式的逻辑中介，达到以思维具体的逻辑终点的运行过程.
3. 给出常见线性空间的例子。
4. 简单介绍线性代数理论的历史发展过程。

教学过程

1. 内容导入：从代数学、分析学、几何学和物理学等不同领域的具体实例引入线性空间的概念。抽象出这些实例中两种运算“加法”与“数乘”。实现从具体到抽象的辩证思维过程。
2. 启发学生探索上述具体实例中这两种运算的规律，总结出八条公理，引入线性空间定义，明确其四要素和八条公理，突出公理化思想。体会到从抽象上升到具体的过程:以抽象为逻辑起点，通过各种形式的逻辑中介，达到以思维具体的逻辑终点的运行过程.
3. 给出常见线性空间的例子。
4. 简单介绍线性代数理论的历史发展过程。以历史唯物主义理解线性空间理论的发展，既突出费马等数学家的贡献，也强调线性空间概念产生的历史必然性。

案例3. 不可约多项式的辩证基本粒子观

类似于整数中素数，不可约多项式是多项式关于乘法的“基本粒子”。

案例3. 不可约多项式的辩证基本粒子观

类似于整数中素数，不可约多项式是多项式关于乘法的“基本粒子”。

思政元素：辩证法的基本粒子观认为原子论的各个概念，即分子、原子、原子核、基本粒子，分别地对应于自然的积层构造的各个层次；而各个层次都受着固有运动规律的支配。

案例3. 不可约多项式的辩证基本粒子观

类似于整数中素数，不可约多项式是多项式关于乘法的“基本粒子”。

思政元素：辩证法的基本粒子观认为原子论的各个概念，即分子、原子、原子核、基本粒子，分别地对应于自然的积层构造的各个层次；而各个层次都受着固有运动规律的支配。

毛主席同钱三强先生探讨了原子的内部结构问题时，主席问：“那质子、中子又是由什么东西组成的呢？”

案例3. 不可约多项式的辩证基本粒子观

类似于整数中素数，不可约多项式是多项式关于乘法的“基本粒子”。

思政元素：辩证法的基本粒子观认为原子论的各个概念，即分子、原子、原子核、基本粒子，分别地对应于自然的积层构造的各个层次；而各个层次都受着固有运动规律的支配。

毛主席同钱三强先生探讨了原子的内部结构问题时，主席问：“那质子、中子又是由什么东西组成的呢？”钱三强先生照实回答：“这个问题正在探索中。根据现在研究的成果，质子、中子是构成原子核的基本粒子。所谓基本粒子，就是最小的，不可再分的。”

案例3. 不可约多项式的辩证基本粒子观

类似于整数中素数，不可约多项式是多项式关于乘法的“基本粒子”。

思政元素：辩证法的基本粒子观认为原子论的各个概念，即分子、原子、原子核、基本粒子，分别地对应于自然的积层构造的各个层次；而各个层次都受着固有运动规律的支配。

毛主席同钱三强先生探讨了原子的内部结构问题时，主席问：“那质子、中子又是由什么东西组成的呢？”钱三强先生照实回答：“这个问题正在探索中。根据现在研究的成果，质子、中子是构成原子核的基本粒子。所谓基本粒子，就是最小的，不可再分的。”毛主席听后，略加思考地说：“我看不见得。从哲学的观点来看，物质是无限可分的。质子、中子、电子，也应该是可分的，一分为二，对立统一嘛！不过，现在实验条件不具备，将来会证明是可分的。你们信不信？你们不信，反正我信。”

教学过程

1. 了解“形而上学”、“实证主义”和“辩证法”三种观点的“基本粒子观”。

教学过程

1. 了解“形而上学”、“实证主义”和“辩证法”三种观点的“基本粒子观”。
2. 回顾整数环中关于乘法的“基本粒子”：素数。类比引入一元多项式环中关于乘法的“基本粒子”，即不可约多项式的定义。

教学过程

1. 了解“形而上学”、“实证主义”和“辩证法”三种观点的“基本粒子观”。
2. 回顾整数环中关于乘法的“基本粒子”：素数。类比引入一元多项式环中关于乘法的“基本粒子”，即不可约多项式的定义。
3. 突出强调一元多项式的“不可约性”依赖与所讨论的数域，即对应于“各个层次”。同一个多项式x^2+1在实数域中是不可约的，而在复数域上又是可约的，因为处于各个“积层”。

教学过程

1. 了解“形而上学”、“实证主义”和“辩证法”三种观点的“基本粒子观”。
2. 回顾整数环中关于乘法的“基本粒子”：素数。类比引入一元多项式环中关于乘法的“基本粒子”，即不可约多项式的定义。
3. 突出强调一元多项式的“不可约性”依赖与所讨论的数域，即对应于“各个层次”。同一个多项式x^2+1在实数域中是不可约的，而在复数域上又是可约的，因为处于各个“积层”。
4. 不可约多项式的基本性质及其应用。

谢谢!